# MASALAH TRANSPORTASI DENGAN *FUZZY SUPPLY* DAN *FUZZY DEMAND*

Ridayati, Ircham
Jurusan Teknik Sipil STTNAS
Jalan Babarsari, Caturtunggal, Depok, Sleman
e-mail: ridayati@gmail.com

**ABSTRAK**

Tulisan ini membahas tentang Masalah Pengambilan keputusan dalam menentukan jumlah barang yang diproduksi dan didistribusikan dalam suatu perusahaan. Pada beberapa keadaan, pengambil keputusan akan membuat keputusan dari suatu permasalahan yang dapat mencapai tingkat kepuasannya untuk memaksimalkan keuntungan perusahaan. Masalah ini disebut masalah transportasi *fuzzy*. Tulisan ini bertujuan menyelesaikan masalah transportasi dengan mempertimbangkan *fuzzy supply* dan *fuzzy demand*, serta biaya angkut per unit dengan mencari kemungkinan solusi optimal yang dihubungkan dengan tingkat kepuasan yang diinginkan.

Masalah Transportasi ini diselesaikan dengan mentransformasi masalah tersebut menjadi masalah program linear deterministik berdasarkan definisi dari keputusan fuzzynya. Tingkat kepuasan maksimum dari *fuzzy supply* dan *fuzzy demand* diperoleh dengan menggunakan keputusan *fuzzy* maksimal.

Solusi optimal diperoleh dengan mempertimbangkan *fuzzy supply* dan *fuzzy demand* dan biaya angkut per unit. Nilai $x_{ij}$ pada solusi optimal yang melanggar kondisi non negatif pada setiap iterasi, disebut breaking point $\alpha_s \in [0, \bar{\alpha}]$, $s = 1,2, \dots l,\ l \in \mathbb{N}$ yang membentuk sub-sub inteval $[\alpha_{s-1}, \alpha_s]$. Terdapat sebanyak $s$ solusi optimal yang diperoleh. Solusi optimal pada tingkat kepuasan $\alpha$ yang diinginkan di representasikan pada interval terkait.

**Kata Kunci**: Masalah transportasi *fuzzy*, TFN, *Breaking point*, Derajat keanggotaan.

## PENDAHULUAN

Dalam dunia industri untuk membuat keputusan tentang perencanaan transportasi sesuai dengan kondisi atau kebutuhan perusahaan tidaklah mudah. Hal ini dikarenakan masalah transportasi terkait dengan banyak faktor sehingga jumlah produksi dan pendistribusiannya menjadi sulit dipastikan. Faktor-faktor yang mempengaruhi produksi suatu barang pada perusahaan diantaranya mesin rusak, karyawan tidak masuk, listrik mati, dan lain-lain. Hal ini menyebabkan ketidakpastian produksi perusahaan, demikian juga dengan pendistribusian barang mengingat kebutuhan barang pada suatu tempat tidak stabil. Sebuah cara yang sering digunakan untuk menyatakan ketidakpastian ini adalah bilangan *fuzzy*. Terkait dengan hal tersebut, beberapa hal yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah masalah transportasi dengan memfuzzykan jumlah *supply* (*fuzzy supply*) dan jumlah *demand* (*fuzzy demand*) yang disebut *fuzzy amount* sehingga dapat dicari solusi optimalnya dengan memperhatikan tingkat kepuasan yang diinginkan.

Secara keseluruhan dalam tulisan ini, notasi $\tilde{A}$ dimaksudkan bahwa himpunan $A$ merupakan himpunan *fuzzy*. Himpunan *fuzzy* yang dikemukakan oleh Zadeh dalam Sakawa (1993) didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.1.1** (Sakawa,1993) *Diberikan himpunan semesta X. Himpunan bagian fuzzy* $\tilde{A}$ *adalah himpunan bagian dari X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan* (*membership function*) *sebagai* $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$ *yang menghubungkan setiap* $x \in X$ *ke bilangan real* $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *di dalam interval* $[0,1]$ *dengan nilai* $\mu_{\tilde{A}}(x)$ *di x menunjukkan derajat keanggotaan x dalam* $\tilde{A}$. *Himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *ditulis sebagai* $\tilde{A} = \{(x|\mu_{\tilde{A}}(x))|x \in X\}$ *dengan* $(x|\mu_{\tilde{A}}(x))$ *menyatakan elemen x mempunyai derajat keanggotaan* $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Bilangan *fuzzy* yang digunakan dalam pembahasan ini adalah bilangan *fuzzy* segitiga atau TFN. Berikut ini adalah definisi TFN.

Guzel (2010) mengatakan bahwa bilangan *fuzzy* TFN diukur dengan suatu triplet $(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)})$ dengan $A^{(1)}, A^{(3)}$ adalah batas bawah dan batas atas dari support $\tilde{A}$ dan $A^{(2)}$ adalah nilai yang diambil dari $\tilde{A}$. Fungsi keanggotaan dari TFN dituliskan sebagai berikut :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - A^{(1)}}{A^{(2)} - A^{(1)}} & \text{untuk } A^{(1)} \le x \le A^{(2)} \\ \frac{A^{(3)} - x}{A^{(3)} - A^{(2)}} & \text{untuk } A^{(2)} \le x \le A^{(2)} \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Secara umum *left* $\tilde{A}$ dan *right* $\tilde{A}$ adalah bagian dari TFN yang dinotasikan dengan *left* $\tilde{A} = (A^{(1)}, A^{(2)}, \infty)$ dan *right* $\tilde{A} = (-\infty, A^{(2)}, A^{(3)})$.

### Masalah Transportasi *Fuzzy*

Formulasi model matematika masalah transportasi *fuzzy* adalah (Guzel, 2010):

Mencari $x_{ij} \ge 0,\quad i = 1,2, \dots, m$ ; $j = 1,2, \dots, n$ yang meminimalkan

$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$

dengan kendala:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{A}_i\ (i = 1,2,3, \dots m)$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{B}_j \ (j = 1,2,3, \dots n)$
$x_{ij} \geq 0, \forall i, j$
kondisi seimbang : $\sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_j$
dengan
$\tilde{A}_i$: *fuzzy supply* maksimum pada $O_i$
$\tilde{B}_j$: *fuzzy demand* minimum pada $D_j$
$C_{ij}$: ongkos angkut satuan pada jalur $O_i \rightarrow D_j$
$x_{ij}$: banyak unit komoditi yang diangkut dari $O_i$ ke $D_j$.

**METODE PENELITIAN**

Penelitian ini dibagi dalam dua tahap. Tahap pertama adalah membuat keputusan *fuzzy* dan maksimum keputusan *fuzzy* yang merupakan tingkat kepuasan maksimum dari total *fuzzy amount* yang dicapai pada titik keseimbangan antara total *fuzzy supply* dan total *fuzzy demand.* Tahap kedua, mencari solusi optimal dengan memperhatikan tingkat kepuasan yang diinginkan.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Pada bagian ini, semesta pembicaraan yang digunakan adalah himpunan semua bilangan real ($R$), sedangkan derajat keanggotaan *fuzzy supply*, *fuzzy demand* berturut-turut merupakan tingkat kepuasan dari *fuzzy supply* dan *fuzzy demand.*
Pada tulisan ini masalah *fuzzy amount* merupakan masalah program linear multiobjektif fuzzy dengan *fuzzy supply* $\tilde{A}_i$ dan *fuzzy demand* $\tilde{B}_j$ dinyatakan dalam bentuk *Triangular fuzzy Number* (TFN).
*Fuzzy supply* $\tilde{A}_i$ dituliskan dalam $\tilde{A}_i = \left(A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, A_i^{(3)}\right)$. Fungsi keanggotaan dari *fuzzy supply* $\tilde{A}_i$, $i = 1,2,3, \dots, m$ dengan $a_i \in R$ dituliskan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}_i}(a_i) = \begin{cases} \dfrac{a_i - A_i^{(1)}}{A_i^{(2)} - A_i^{(1)}} & , A_i^{(1)} \leq a_i \leq A_i^{(2)} \\ \dfrac{a_i - A_i^{(3)}}{A_i^{(2)} - A_i^{(3)}} & , A_i^{(2)} \leq a_i \leq A_i^{(3)} \\ 0 & , yang\ lainnya \end{cases}$$

*Fuzzy demand* $\tilde{B}_j$ dituliskan dalam $\tilde{B}_j = \left(B_j^{(1)}, B_j^{(2)}, B_j^{(3)}\right)$. Fungsi keanggotaan dari *fuzzy demand* $\tilde{B}_j$, $j = 1,2,3, \dots, n$ dengan $b_j \in R$ dituliskan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{B}_j}(b_j) = \begin{cases} \frac{b_j - B_j^{(1)}}{B_j^{(2)} - B_j^{(1)}}, & B_j^{(1)} \leq b_j \leq B_j^{(2)} \\ \frac{b_j - B_j^{(3)}}{B_j^{(2)} - B_j^{(3)}}, & B_j^{(2)} \leq b_j \leq B_j^{(3)} \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Selanjutnya, $\alpha - level$ merupakan tingkat kepuasan *fuzzy amount* .

**Tingkat Kepuasan Maksimum ($\bar{\alpha}$) dari *Fuzzy Amount***

Pandang fungsi keanggotaan linear dari *fuzzy supply* $\mu_{\tilde{A}_i}(a_i)$, $i = 1,2, \dots, m$ dan *fuzzy demand* $\mu_{\tilde{B}_j}(b_j), j = 1,2, \dots, n$ kemudian dengan menggunakan keputusan *fuzzy* dari Belman dan Zadeh (1970), maka masalah program linear ini diformulasikan sebagai berikut:
maksimalkan $\alpha$
dengan kendala

$$A_i^{(1)} + \alpha\left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq A_i^{(3)} - \alpha\left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right), \quad i = 1,2,3, \dots, m.$$

$$B_j^{(1)} + \alpha\left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq B_j^{(3)} - \alpha\left(B_j^{(3)} - B_j^{(2)}\right), \quad j = 1,2,3, \dots, n. \qquad (1)$$

Persamaan ini akan menghasilkan tingkat kepuasan maksimum $\alpha = \bar{\alpha}$.

Pada *fuzzy supply* $\tilde{A}_i$ dan *fuzzy demand* $\tilde{B}_j$ terdapat suatu $a_i = \mu_{\tilde{A}_i}^{-1}(\alpha)$ dan $b_j = \mu_{\tilde{B}_j}^{-1}(\alpha)$ untuk setiap $\alpha \in (0,1)$ dengan fungsi keanggotaannya monoton untuk $0 < \alpha < 1$. Jika $\alpha$ dianggap sebagai parameter, maka untuk $\mu_{\tilde{A}_i}(a_i) = \alpha$ diperoleh

$$a_i = \mu_{\tilde{A}_i}^{-1}(\alpha) = A_i^{(3)} - \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right)\alpha \qquad (2)$$

dan untuk $\mu_{\tilde{B}_j}(b_j) = \alpha$ diperoleh

$$b_j = \mu_{\tilde{B}_j}^{-1}(\alpha) = B_j^{(1)} + \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right)\alpha. \qquad (3)$$

Total *supply* untuk semua *origin* adalah

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{(3)} - \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right)\alpha\right] \qquad (4)$$

dan total *demand* untuk semua *destination* adalah

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\left[B_j^{(1)} + \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right)\alpha\right]. \qquad (5)$$

Terlihat bahwa jika parameter $\alpha$ naik maka kuantitas $a_i$ untuk *origin* ke *i* menurun sedangkan kuantitas $b_j$ untuk *destination* ke *j* naik.

Diberikan $\mathbb{X}$ himpunan yang memuat alternatif solusi dari pengambil keputusan. Misalkan $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$ dan $b = \sum_{j=1}^{n} b_j$, maksimum keputusan *fuzzy* didefinisikan sebagai:

$$\bar{\alpha} = \max_{x \in \mathbb{X}} \left\{\min\left\{\mu_{\sum_{i=1}^{m}\tilde{A}_i}(a), \mu_{\sum_{j=1}^{n}\tilde{B}_j}(b)\right\}\right\}$$

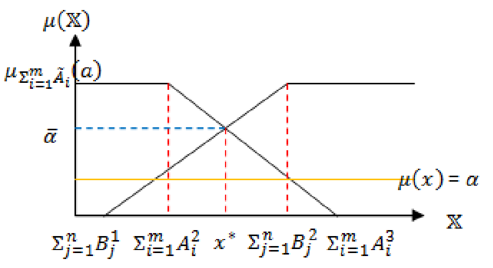
Dari persamaan (2) dan (3) solusi masalah program linear (1) dapat diperoleh dengan menyelesaikan masalah program linear berikut ini :
Maksimalkan $\alpha$
dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq A_i^{(3)} - \alpha\left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right), \ i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq B_j^{(1)} + \alpha\left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right), \ j = 1,2, \dots, n \qquad (6)$$

Diberikan $\mathbb{X}$ himpunan yang memuat solusi dari suatu masalah (3.6), Titik kesetimbangan dan tingkat kepuasan maksimum yang diilustrasikan pada Gambar 3.1 dan didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 3.1** *Suatu titik $x \in \mathbb{X}$ merupakan titik kesetimbangan antara total fuzzy supply dan total fuzzy demand apabila $x = a = b$ yaitu ketika total fuzzy supply sama dengan total fuzzy demand. Selanjutnya, jika derajat keanggotaan total fuzzy supply sama dengan derajat keanggotaan total fuzzy demand untuk suatu titik kesetimbangan $x^* \in \mathbb{X}$ yaitu $\mu_{\sum_{i=1}^m \tilde{A}_i}(x^*) = \mu_{\sum_{j=1}^n \tilde{B}_j}(x^*)$ maka tingkat kepuasan $\alpha$ merupakan tingkat kepuasan maksimum $\bar{\alpha}$.*




Gambar 3.1 Tingkat kepuasan maksimum pada titik kesetimbangan dari total *fuzzy supply* dan total *fuzzy demand*

**Lemma 3.2** *Tingkat kepuasan maksimum $\bar{\alpha}$ dari* (6) *ada dan tunggal.*

**Teorema 3.3** *Tingkat kepuasan maksimum $\bar{\alpha}$ dari* (6) *merupakan maksimum keputusan fuzzy yaitu* $\bar{\alpha} = \max_{x \in \mathbb{X}} \left\{ \min \left\{ \mu_{\sum_{i=1}^m \tilde{A}_i}(x),\ \mu_{\sum_{j=1}^n \tilde{B}_j}(x) \right\} \right\}$ *yang dicapai di titik $x = x^*$.*

Dari $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, diperoleh tingkat kepuasan maksimum:

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i^{(3)} - \sum_{j=1}^n B_j^{(1)}}{\sum_{i=1}^m \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right) + \sum_{j=1}^n \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right)} \tag{7}$$

dengan

$$\sum_{i=1}^m \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right) + \sum_{j=1}^n \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right) > 0.$$

karena $\bar{\alpha}$ merupakan maksimum keputusan *fuzzy* sehingga $\bar{\alpha}$ selalu berada pada interval $[0,1]$.

a. Jika $\alpha \in [0, \bar{\alpha})$ maka masalah menjadi seimbang dengan menambahkan *dummy destination*.
b. Jika $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1]$. Katakanlah $\alpha = \alpha'$ maka masalah menjadi seimbang dengan menambahkan *dummy origin*. Namun karena tingkat kepuasan maksimum berada di $\alpha = \bar{\alpha}$, maka nilai $\alpha' \in [\bar{\alpha}, 1]$ tidak menunjukkan tingkat kepuasan yang sebenarnya, tingkat kepuasannya berkorespondensi dengan $\alpha'' \in [0, \bar{\alpha}]$ (Gambar 3.2), yaitu:

$$\alpha'' = \frac{\sum_{i=1}^m A_i^{(3)} - \sum_{j=1}^n B_j^{(1)} - \sum_{j=1}^n \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right) \alpha'}{\sum_{i=1}^m \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right)}$$

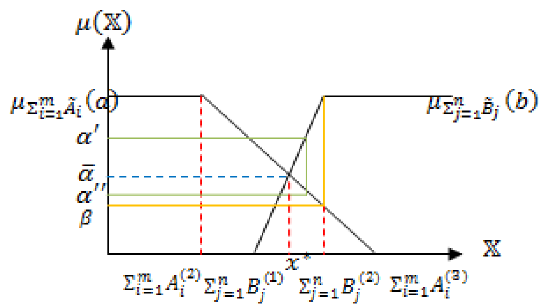
dengan $\sum_{i=1}^m \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right) > 0$.

Dengan kata lain, solusi pada tingkat kepuasan $\alpha''$ diperoleh dari $\alpha'$ karena nilai $\alpha''$ berada dalam interval $[\beta, \bar{\alpha}]$, $0 \leq \beta \leq \bar{\alpha}$ dengan $\beta$ adalah tingkat kepuasan pada saat total *demand* mencapai derajat keanggotaan 1.

(i) Jika $\sum_{j=1}^n B_j^{(2)} \geq \sum_{i=1}^m A_i^{(3)}$ maka

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m A_i^{(3)} - \sum_{j=1}^n B_j^{(2)}}{\sum_{i=1}^m \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right)}.$$

(ii) Jika $\sum_{j=1}^n B_j^{(2)} \geq \sum_{i=1}^m A_i^{(3)}$ maka $\beta = 0$.




Gambar 3.2 Tingkat kepuasan $\alpha$ berkorespondensi dengan $\alpha''$

Masalah transportasi *fuzzy* adalah menentukan kuantitas $x_{ij}$ dari *origin* ke $i$ ke *destination* ke $j$, yang meminimalkan ongkos angkut satuan :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

dengan kendala *origin* :

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i = A_i^{(3)} - \left(A_i^{(3)} - A_i^{(2)}\right)\alpha,$

untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

kendala *destination* :

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j = B_j^1 + \left(B_j^{(2)} - B_j^{(1)}\right)\alpha,$

untuk $j = 1,2,3,\ldots,n$

kendala non negatif :

$$x_{ij} \geq 0,\ \ \forall i, j. \tag{8}$$

***Breaking Point* $\alpha$**

Perhatikan pada persamaan (3.8) bahwa banyaknya barang yang diangkut dari *origin* ke *destination* serta solusi optimalnya akan berubah bergantung pada $\alpha$. Perubahan nilai $\alpha$ ini akan merubah banyaknya barang yang dikirim hingga pada keadaan tertentu akan melanggar (tidak memenuhi) kendala non negatifnya. Nilai $\alpha$ yang tidak memenuhi kendala non negatif dari solusi optimal disebut *breaking point* $\alpha$. Jika nilai $\alpha$ dalam *breaking point* ini paling sedikit satu komponen dari solusi optimal bernilai negatif maka kondisi fisible dilanggar, pada keadaan ini membentuk suatu sub interval. Kondisi fisibel diperoleh kembali dengan menggunakan masalah dual. Jika variasi $\alpha$ dalam arah positif tidak memenuhi kondisi fisibel lagi maka operasi yang sama dilanjutkan, keadaan ini membentuk sub interval lagi, hingga sampai pada nilai $\bar{\alpha}$. Dengan demikian diperoleh beberapa sub-sub interval $[\alpha_{s-1}, \alpha_s]$ $s = 1,2,\ldots,l$ untuk $l \in \mathbb{N}$ dalam interval $[0, \bar{\alpha}]$ yang bersesuaian.

Diperlihatkan kembali bahwa ketika *amount* diberikan dalam bentuk *fuzzy* secara simultan, jumlah solusi optimalnya $s$ dengan $s$ adalah banyaknya interval yang dibentuk oleh $\alpha$ dalam interval $[0, \bar{\alpha}]$,namun tidak menutup kemungkinan ada beberapa solusi optimal yang sama.

Berikut diberikan contoh kasus suatu perusahaan yang menyediakan produk semacam yang mempunyai 3 pabrik (*origin*) yaitu $O_1, O_2, O_3$ ke gudang gudang penjualan (*destination*) yaitu $D_1, D_2, D_3$. Kapasitas pabrik, kebutuhan gudang, dan biaya pengangkutan dari tiap pabrik ke tiap gudang yang disajikan dalam bentuk TFN (Tabel 3.1) serta jumlah produksi dan distribusi dalam bentuk *crisp* (Tabel 3.2) .

Tabel 3.1 Tabel transportasi awal dengan $\tilde{A}_i, \tilde{B}_j$ berbentuk *TFN*

| Destination / Origin | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | Supply $(\tilde{A}_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $x_{11}$ <br> $c_{11} = 5$ | $x_{12}$ <br> $c_{12} = 7$ | $x_{13}$ <br> $c_{13} = 11$ | $\tilde{A}_1 = (2,9,11)$ |
| $O_2$ | $x_{21}$ <br> $c_{21} = 9$ | $x_{22}$ <br> $c_{22} = 15$ | $x_{23}$ <br> $c_{23} = 18$ | $\tilde{A}_2 = (3,8,12)$ |
| $O_3$ | $x_{31}$ <br> $c_{31} = 13$ | $x_{32}$ <br> $c_{32} = 16$ | $x_{33}$ <br> $c_{33} = 10$ | $\tilde{A}_3 = (4,9,14)$ |
| Demand $(\tilde{B}_j)$ | $\tilde{B}_1 = (2,5,6)$ | $\tilde{B}_2 = (14,15,17)$ | $\tilde{B}_3 = (5,10,13)$ | |

Tabel 3.2 Tabel transportasi awal dengan $a_i, b_j$ bernilai *crisp*

| Destination / Origin | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | Supply $(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $x_{11}$ <br> $c_{11} = 5$ | $x_{12}$ <br> $c_{12} = 7$ | $x_{13}$ <br> $c_{13} = 11$ | $a_1 = 11 - 2\alpha$ |
| $O_2$ | $x_{21}$ <br> $c_{21} = 9$ | $x_{22}$ <br> $c_{22} = 15$ | $x_{23}$ <br> $c_{23} = 18$ | $a_2 = 12 - 4\alpha$ |
| $O_3$ | $x_{31}$ <br> $c_{31} = 13$ | $x_{32}$ <br> $c_{32} = 16$ | $x_{33}$ <br> $c_{33} = 10$ | $a_3 = 14 - 5\alpha$ |
| Demand $(b_j)$ | $b_1 = 2 + 3\alpha$ | $b_2 = 14 + \gamma$ | $b_3 = 5 + 5\alpha$ | |

Banyaknya barang yang dikirim dari *origin* ke *i* ke *destination* ke *j* direpresentasikan dalam variable keputusan

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}).$$

Bentuk deterministik dari masalah program linear multiobjektif *fuzzy amount* dituliskan sebagai berikut:
memaksimalkan $\alpha$
dengan kendala:

$$\left.\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 2 + 7\alpha \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 11 - 2\alpha \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq 3 + 5\alpha \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 12 - 4\alpha \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\geq 4 + 5\alpha \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 14 - 5\alpha \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 2 + 3\alpha \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 6 - \alpha \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 14 + \alpha \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leq 17 - 2\alpha \\
x_{13} + x_{32} + x_{33} &\geq 5 + 5\alpha \\
x_{13} + x_{32} + x_{33} &\leq 13 - 3\alpha
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Penyelesaian masalah (9) dengan menggunakan bantuan software WINQSB adalah $x_{11} = 3{,}4$ , $x_{12} = 6$ , $x_{13} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 8$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 1$, $x_{32} = 0$, $X_{33} = 9$ yang dicapai pada $\alpha = 0{,}8$.
Nilai-nilai $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})$ disubstutusikan ke $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ sehingga diperoleh $a_1 = 9{,}4$, $a_2 = 8{,}8$, $a_3 = 10$, $b_1 = 4{,}4$, $b_2 = 14{,}8$ , $b_3 = 9$.
Nilai-nilai $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ ini masing-masing berada pada interval-interval $9 \leq a_1 \leq 11$, $8 \leq a_2 \leq 12$, $9 \leq a_3 \leq 14$, $2 \leq b_1 \leq 5$, $14 \leq b_2 \leq 15$, $5 \leq b_3 \leq 10$ .
Nilai $\bar{\alpha} = 0{,}8$ diperoleh dari $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$ yang berarti bahwa tingkat kepuasan yang sebenarnya akan berada dalam interval $[0,\ \bar{\alpha}]$ yaitu $[0,\ 0{,}8]$.

Terlihat pada Tabel 3.2 bahwa jumlah kebutuhan gudang tidak sama dengan kapasitas yang tersedia, yaitu untuk total *supply* $\sum_{i=1}^{3} a_i = 37 - 11\alpha$ dan untuk total *demand j=13bj=21+9α.*
Berdasarkan perhitungan diatas, tampak bahwa pada $\alpha \in [0,\ 0{,}8)$ kapasitas yang tersedia (*supply*) lebih besar dari pada kebutuhan gudang (*demand*), sehingga akan dibuat *dummy collumn* dengan nilai costnya nol. Jumlah kebutuhan gudang $b_4 = 16 - 20\alpha$. Selanjutnya masalah transportasi ini diselesaikan dengan *fuzzy amount.* Ambil $\alpha = 0$ sebagai representasi dari interval pertama untuk $\alpha$. Dengan menggunakan metode VAM diperoleh solusi optimal yang diberikan dalam Tabel 3.3. Terlihat bahwa kotak kotak yang terisi nilai $x_{ij}$ yang paling

kecil untuk $\alpha = 0$ adalah kotak $K_{34}$ dengan $x_{34} = 7 - 10\alpha$, sehingga untuk $x_{34} = 0$ diperoleh $\alpha = \frac{7}{10}$ yang merupakan *breaking point* $\alpha$. Jadi penyajian solusi optimal adalah benar untuk interval $\alpha \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$

Tabel 3.3 Tabel solusi optimal untuk interval $0 \leq \alpha \leq \frac{7}{10}$

| Destination / Origin | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | Dummy | Supply $(A_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $c_{11} = 5$ | $11 - 2\alpha$ <br> $c_{12} = 7$ | $c_{13} = 11$ | $c_{14} = 0$ | $a_1 = 11 - 2\alpha$ |
| $O_2$ | $2 + 3\alpha$ <br> $c_{21} = 9$ | $3 + 3\alpha$ <br> $c_{22} = 15$ | $c_{23} = 18$ | $7 - 10\alpha$ <br> $c_{24} = 0$ | $a_2 = 12 - 4\alpha$ |
| $O_3$ | $c_{31} = 13$ | $c_{32} = 16$ | $5 + 5\alpha$ <br> $c_{33} = 10$ | $9 - 10\alpha$ <br> $c_{34} = 0$ | $a_3 = 14 - 5\alpha$ |
| Demand $(B_j)$ | $b_1 = 2 + 3\alpha$ | $b_2 = 14 + \alpha$ | $b_3 = 5 + 5\alpha$ | $b_4 = 16 - 20\alpha$ | |

Pada saat $\alpha > \frac{7}{10}$, karena $x_{24}$ kurang dari nol, hal ini dikatakan melanggar kondisi non negatif sehingga $x_{24}$ harus keluar dari basis solusi. Kemudian dengan menggunaan algoritma dualnya, geser nilai dual $x_{24}$ ke kotak kosong $x_{32}$ melalui lintasan $K_{32} \rightarrow K_{22} \rightarrow K_{24} \rightarrow K_{34}$, sehingga diperoleh tabel baru dengan $x_{32} = -7 + 10\alpha$ masuk menjadi basis solusi (Tabel 3.4). Terlihat bahwa kotak-kotak yang terisi nilai $x_{ij}$, nilai paling kecil untuk $\alpha = \frac{7}{10}$ adalah kotak $K_{34}$ dengan $x_{34} = 16 - 20\alpha$, sehingga untuk $x_{34} = 0$ diperoleh $\alpha = \frac{16}{20}$ yang merupakan *breaking point* $\alpha$. Jadi penyajian solusi optimal adalah benar untuk interval $\alpha \in \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right]$.

Tabel 3.4 Tabel solusi optimal untuk interval $\frac{7}{10} < \alpha \leq \frac{8}{10}$

| Destination / Origin | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | Dummy | Supply $(A_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $c_{11} = 5$ | $11 - 2\alpha$ <br> $c_{12} = 7$ | $c_{13} = 11$ | $c_{14} = 0$ | $a_1 = 11 - 2\alpha$ |
| $O_2$ | $2 + 3\alpha$ <br> $c_{21} = 9$ | $10 - 7\alpha$ <br> $c_{22} = 15$ | $c_{23} = 18$ | $c_{24} = 0$ | $a_2 = 12 - 4\alpha$ |
| $O_3$ | $c_{31} = 13$ | $-7 + 10\alpha$ <br> $c_{32} = 16$ | $5 + 5\alpha$ <br> $c_{33} = 10$ | $16 - 20\alpha$ <br> $c_{34} = 0$ | $a_3 = 14 - 5\alpha$ |
| Demand $(B_j)$ | $b_1 = 2 + 3\alpha$ | $b_2 = 14 + \alpha$ | $b_3 = 5 + 5\alpha$ | $b_4 = 16 - 20\alpha$ | |

Pada Tabel 3.4, solusi perolehan untuk interval $\alpha \in \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right]$ adalah optimal dan fisibel. Level kepuasan maksimum $\bar{\alpha} = 0{,}8$ yang berarti bahwa observasi hanya akan dilakukan pada interval $[0,\ 0{,}8]$. Sehingga masalah ini hanya di diobservasi pada $\alpha \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$ dan $\alpha \in \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right]$.

Terlihat bahwa pada perhitungan diatas lebih menguntungkan jika pengambil keputusan menentukan tingkat kepuasan pada $\frac{7}{10} \leq \alpha \leq \frac{8}{10}$, dengan

$$\begin{aligned} f_{min} = (7)(11 - 2\alpha) + (9)(2 + 3\alpha) \\ + (15)(10 - 7\alpha) \\ + (16)(-7 + 10\alpha) \\ + (10)(5 + 5\alpha) \\ + (0)(16 - 20\alpha) \\ = 152 + 81\alpha. \end{aligned}$$

## KESIMPULAN DAN SARAN

### Kesimpulan

Masalah penentuan jumlah barang yang dikirim dari origin ke destination dengan jumlah *supply*, jumlah *demand* dan *ongkos* angkut satuan yang bersifat *fuzzy* merupakan masalah transportasi *fuzzy* karena banyaknya faktor yang mempengaruhi proses produksi dan situasi pasar yang tidak pasti. Masalah ini diselesaikan dengan mentransformasi masalah tersebut menjadi masalah program linear deterministik berdasarkan definisi dari keputusan fuzzynya. Setelah itu, dicari tingkat kepuasan maksimum dari *fuzzy amount* $\bar{\alpha}$ yang diperoleh dengan menggunakan keputusan *fuzzy* maksimal.
Solusi optimal diperoleh dengan mempertimbangkan *fuzzy supply* dan *fuzzy demand* dan biaya angkut per unit. Nilai $x_{ij}$ pada solusi optimal yang melanggar kondisi non negatif pada setiap iterasi, disebut breaking point $\alpha_s \in [0, \bar{\alpha}]$, $s = 1,2, \dots l$, $l \in \mathbb{N}$ yang membentuk sub-sub inteval $[\alpha_{s-1}, \alpha_s]$. Terdapat sebanyak $s$ solusi optimal yang diperoleh. Solusi optimal pada tingkat kepuasan $\alpha$ yang diinginkan di representasikan pada interval terkait.

## SARAN

Masalah transportasi yang dibahas dalam tulisan ini merupakan masalah program linear single objektif yaitu memaksimalkan keuntungan saja, oleh karena itu diharapkan bisa memotivasi penelitian lebih lanjut pada masalah program linear multi objektif, misalnya memaksimalkan keuntungan dan meminimalkan limbah.

## DAFTAR PUSTAKA


Bellman,R.E and Zadeh,L.A,1970, *Decision making in a fuzzy environment*, Management Science 17 ,B141-B164.

Lai, Y.J. and C.L. hwang, 1992. *Fuzzy Mathematical Programming*, springer-Verlag, Berlin

Mehmet ahlatcioglu, Muatafa sivri, and Nuran Guzel, 2002. Transportation of the fuzzy amount using the fuzzy cost. *Journal of*

*Marmara for pure and applied sciences*, 18:141-157

Nuran Guzel,2010. Fuzzy Transportations problem with the fuzzy amount and the fuzzy costs, *World Applied sciences journal* 8 (5) : 543-549.

Sakawa, Masatoshi, 1993, *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization*, Plenum Press, New York.